

## 一変数の積分法

担当教員：松井伸也

2単位

## 設 題

次のページからの問題を解いて下さい。この表紙は印刷する必要はありません。

作成方法は「筆記」のみ

## 筆 記

筆記用具：特に指定しない

用 紙：コピー用紙等（無地）

## 注意事項

必要な計算・説明を書いて下さい。答えだけの問題は添削できません。

解答用紙は計算用紙ではありません。分かりやすい記述に心がけて下さい。

## 1 変数の積分法レポート課題 (担当 松井伸也)

- 課題は番号順に解き、指示がない限り説明と計算を書いて下さい。未解答問題は「解けません」として下さい。レポートは、手書で作成し提出をして下さい。文字が小さい、薄いなど判読が難しい、斜めから撮ったレポートなどは添削できない場合があります。ワープロ等を使って作成したレポートは「不合格」とします。なお教科書は「学習用プリント」です。
- 教科書に記述されている原始関数は使って構いません。教科書に記述のない原始関数は、原始関数であることを証明してから使って下さい。また教科書で使用していない関数については、その定義を与えて下さい。定義がない場合は、定義が不明確なので添削・評価が出来ません。
- 積分の計算を与えるオンラインサービス等では、特異な表現、教科書とは異なる記号の表記が使われています。このサービスを使ったレポートは添削・評価しないことがあります。

(1)  $\frac{x+19}{6x^2+19x+10}$  を部分分数分解して下さい。

- (2) (1) の結果を利用し、次の等号を満たす定数  $a, b, c, d$  を求めて下さい。

$$\int_0^1 \frac{x+19}{6x^2+19x+10} dx = a \log 2 + b \log 3 + c \log 5 + d \log 7$$

- (3)  $\cos^4 x$  の導関数  $(\cos^3 x)'$  を計算し、 $\cos^4 x = \cos^3 x \times \cos x = \cos^3 x \times (\sin x)'$  と部分積分の公式を利用して、 $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^4 x dx$  を計算して下さい。教科書 第9章「部分積分例4」が参考になります。

- (4)  $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2+\sin x} dx$  を  $t = \tan \frac{x}{2}$  と変数変換 (置換) して計算して下さい。教科書 12章 12.2 が参考になります。

- (5)  $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+3}} dx$  を  $\sqrt{x^2+2x+3} = t - x$  という変数変換 (置換積分) で計算します。教科書 第12章 が参考になります。

(5 i)  $x$  を  $t$  の式で表し、 $\frac{dx}{dt}$  を計算して下さい。計算と説明を必ず書いて下さい。

(5 ii)  $t$  の範囲を求めて下さい。計算と説明を必ず書いて下さい。

(5 iii)  $\frac{x}{\sqrt{x^2+2x+3}} \times \frac{dx}{dt}$  を  $t$  の式で表して下さい。計算と説明を必ず書いて下さい。

(5 iv)  $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+3}} dx$  を計算して下さい。  $u = t + 1$  とおいて計算して下さい。

- (6) 関数  $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$  は  $x = 1$  で定義されず、 $0 \leq x < 1$  で連続ですから、積分  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$  は広義積分です。次の計算を見て下さい。

$t = 1 - x$  とおきます。

-  $x = 0$  のとき  $t = 1$ ,  $x = 1$  のとき  $t = 0$  です。

-  $\frac{dt}{dx} = (1 - x)' = -1$  ですから  $dx = -dt$  です。

-  $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{t}}$  です。

よって  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = \int_1^0 \frac{1}{\sqrt{t}} \times (-1)dt$  ですが,  $0 \leq t \leq 1$  での  $\frac{1}{\sqrt{t}}$  の原始関数は  $2\sqrt{t}$  ですから

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = \int_1^0 \frac{1}{\sqrt{t}} \times (-1)dt = -2\sqrt{t} \Big|_{t=1}^{t=0} = -2(\sqrt{0} - \sqrt{1}) = 2$$

です。

以上は正しい計算ではありません。正しくない理由を教科書の定理を使い説明して下さい。さらに正しい計算を与えて下さい。